

Задачи с прошлых олимпиад (логика)

1. Петя, Витя и Тимур посчитали, что в этом, 2007 году большинство их дней рождения приходится на один день недели — на пятницу. Верно ли, что и в следующем году большинство их дней рождения попадет на один день недели?

2. К бабушке приехали 11 внучат - все дети двух её дочерей. Одна из внучек сказала: “Ой, а здесь у меня в два раза больше сестричек, чем дома”, а другая ответила: “здесь у меня в три раза больше сестричек, чем дома”. Сколько внуков и сколько внучек у бабушки?

3. Коля и Вася за октябрь получили по 20 оценок, причём Коля получил:

столько же пятёрок, сколько Вася четвёрок;

столько же четвёрок, сколько Вася троек;

столько же троек, сколько Вася двоек;

столько же двоек, сколько Вася пятёрок.

Хотя наборы оценок у мальчиков были разными, средний балл за октябрь у обоих вышел одинаковым. Сколько двоек в октябре получил Коля? Ответ обосновать. Известно, что в школе, где учатся мальчики, ставят только упомянутые оценки.

4. У Карлсона в шкафу стоят 5 банок малинового, 8 банок земляничного, 10 банок вишнёвого и 25 банок клубничного варенья. Может ли Карлсон съесть всё варенье, если каждый день он хочет съедать ровно две банки варенья, при этом обязательно из разных ягод?

5. Две свечи разной толщины, каждая длиной 24 см, зажжены одновременно. Тонкая свеча сгорает за 4 часа, толстая — за 6 часов. Через какое время одна свеча будет вдвое короче другой? Ответ обосновать. Предполагается, что каждая из свечей горит равномерно, т.е. за равные промежутки времени уменьшается на одну и ту же высоту.

6. На кошачьей выставке в ряд сидят 80 котят. На каждом из них голубой или розовый бант. При этом если на каком-то котёнке бант розовый, то любой котёнок, сидящий от него через 9 котят обязательно с голубым бантом. (Например, если у 28-го котёнка розовый бант, то у 18-го и 38-го банты голубые.) Докажите, что котят с розовыми бантами не больше, чем с голубыми.

7. Перед началом чемпионата мира по футболу пятеро болельщиков высказали прогнозы, что в финал выйдут команды: 1) Франция и Голландия, 2) Россия и Италия, 3) Франция и Россия, 4) Англия и Голландия, 5) Голландия и Италия. Один прогноз оказался полностью неверным, а в остальных правильно была угадана только одна из двух команд-финалисток. Какие команды вышли в финал?

8. В однокруговом шахматном турнире (каждый шахматист играет с каждым ровно одну партию) Федя и Лёша сыграли поровну партий, после чего заболели и выбыли из турнира. Остальные участники доиграли турнир до конца. Всего в турнире было сыграно 23 партии. Сыграли ли Федя и Лёша между собой?

9. В турнире по футболу участвовало несколько команд. Каждая команда должна была сыграть с каждой по одному матчу. Но после нескольких матчей турнира ровно половина команд была снята с соревнований и выбыла из турнира, который продолжился без них. В результате этого по окончании турнира оказались сыгранными ровно 77 матчей, при этом все снятые команды успели сыграть между собой. Кроме того, выяснилось, что все снятые команды сыграли в турнире по одинаковому количеству матчей. Сколько всего матчей было бы сыграно в турнире, если бы состоялись все запланированные встречи?

10. Петя и Витя играют в следующую игру: сначала Петя раскладывает 100 камней в 4 кучки (так, как сам пожелает, лишь бы в каждой кучке был хотя бы один камень). После этого Витя забирает несколько камней, так, чтобы в каких-нибудь двух кучках камней стало поровну. Витя платит Пете по рублю за каждый взятый камень, поэтому он стремится взять как можно меньше камней. Какой максимальный выигрыш может гарантировать себе Петя, и как он должен сформировать кучки?

11. Бикфордов шнур горит неравномерно, а сгорает ровно за 1 минуту.

- а) При помощи одного такого шнура отмерьте 30 секунд;
- б) при помощи двух таких шнуров отмерьте 45 секунд.

12. Серёжа разрезал квадратный именинный торт весом 900 граммов двумя прямолинейными разрезами, параллельными одной паре сторон торта и двумя параллельными разрезами, параллельными другой паре его сторон на 9 прямоугольных кусков. Докажите, что Петя может выбрать три куска торта, которые не имеют общих сторон, так, что их суммарный вес будет не меньше 300 граммов.

13. Имеется 10 арбузов и весы, с помощью которых можно за одно взвешивание определить общую массу любых трёх арбузов. Как за 6 таких взвешиваний определить общую массу всех арбузов?

14. Среди 18 монет есть одна фальшивая, более лёгкая. Как одним взвешиванием на чашечных весах без гирь отобрать среди этих монет 6 настоящих, 9 настоящих, 12 настоящих?

15. Есть лампочка и 10 пронумерованных кнопок. Известно, что ровно 5 из них действующие. За одну попытку разрешается нажать одновременно три любые кнопки. Если среди них есть хотя бы одна действующая — лампочка загорается. Как при помощи не более 9 попыток выяснить, является ли кнопка с номером 1 действующей? (При отпускании нажатых кнопок по завершении каждой попытки лампочка всегда гаснет).

16. На доске записаны натуральные числа $1, 2, 3, \dots, 48, 49$. Каждую минуту Вася стирает с доски какие-то два числа по своему усмотрению, а Петя записывает на доску сумму только что стёртых чисел, уменьшенную на единицу. Через 48 минут на доске остаётся одно число. Какое? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.

17. Двое игроков поочередно записывают по цифре на полосу из 12 клеточек (в каждую клеточку по цифре) до тех пор, пока не получится 12-значное число. При этом цифры 0 и 9 записывать запрещено. Докажите, что второй игрок может добиться того, чтобы полученное число делилось на 77.

18. На столе лежит 2009 книг. Аня и Валя играют в следующую игру: они по очереди (первая Аня) убирают книги со стола, причём каждая девочка в свою очередь обязана убрать хотя бы одну книгу и не может убрать более половины книг, лежащих на столе (на момент начала её хода). Проигрывает та из девочек, кто не может выполнить это условие. Кто, Аня или Валя, может добиться выигрыша независимо от действий своей противницы.

19. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться произведение трех натуральных чисел, если их сумма равна 407?

20. Даны три числа x , $1-y$ и $y-x$. Пусть наименьшее из них равно S . Какое наибольшее значение может принимать S ? Ответ обосновать.

21. Положим $x = \frac{360^\circ}{13}$. Требуется на плоскости провести из одной точки несколько лучей так, чтобы среди величин образовавшихся при этом углов встретилось каждое из чисел $x, 2x, 3x, \dots, 12x$. Каким наименьшим количеством лучей можно обойтись?

22. В каждой вершине каркаса куба, сделанного из проволоки, сидит муравей. Все муравьи стали двигаться и собрались в одной точке каркаса. Каждый из них дополз до этой точки по рёбрам, используя кратчайший из всех возможных для себя путей. Сумма расстояний, которые проползли все муравьи, равно 240 см. Найдите длину ребра куба.

23. Четыре человека выкопали канаву, причём они копали по очереди, каждый со своей постоянной скоростью (у разных людей скорость могла быть разной). Каждый из них копал столько времени, за сколько трое других могли бы, копая одновременно, выкопать половину канавы. Во сколько раз быстрее (по сравнению с фактическим временем) они выкопали бы канаву вчетвером, если бы копали все сразу?

24. Для перевозки почты из почтового отделения на вокзал ежедневно высылается легковой автомобиль, который забирает почту с поезда и привозит её обратно в почтовое отделение. Однажды поезд прибыл раньше срока, указанного в расписании, и привезённая почта была отправлена на попутной грузовой машине. Через 30 минут езды грузовая машина встретила легковой автомобиль, который принял почту и, не задерживаясь, повернул обратно. В почтовое отделение автомобиль прибыл на 20 минут раньше обычного. На сколько минут раньше срока прибыл почтовый поезд?

25. В школе учатся умные красивые девушки, среди них есть блондинки. Известно, что какую бы девушку из школы ни выбрать, существует блондинка такой же красоты, и существует блондинка такая же умная (возможно, это одна и та же блондинка, а, возможно, и нет). Среди всех девушек одинакового ума блондинки самые красивые. Среди блондинок более умные являются и более красивыми. Тем не менее мальчишки из математического класса школы считают, что среди всех девушек, одинаковых по красоте, блондинки самые глупые. Правы ли мальчишки?

26. По кругу записано несколько натуральных чисел (их больше, чем три), сумма которых равна 37. Известно, что суммы любых трёх подряд идущих чисел равны между собой. Сможет ли Знайка только по этим данным определить, какие числа записаны по кругу?

27. 1000 радиусов разделили круг на 1000 одинаковых секторов: 500 синих и 500 красных. В синие секторы, начиная с некоторого, подряд против движения часовой стрелки записали натуральные числа от 1 до 500. В красные секторы, начиная с какого-то, записали эти же числа также подряд, но по часовой стрелке. Докажите, что существует полукруг, в котором записаны все числа от 1 до 500.

28. Квадратная доска размером 100×100 клеток раскрашена в шахматном порядке (левая нижняя клетка чёрного цвета). Её распилили (по линиям сетки) на квадраты с нечётной длиной стороны (квадраты не обязательно одного размера). В каждом получившемся квадрате отметили центральную клетку. Докажите, что число отмеченных чёрных клеток равно числу отмеченных белых клеток.

29. Какое наибольшее число ладей можно поставить на шахматную доску (размера 8×8) так, чтобы каждая ладья была не более, чем одну другую?

30. Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматную доску (размера 8×8) так, чтобы каждый король бил не более, чем одного другого?

31. Какое наибольшее число коней можно поставить на шахматную доску (размера 8×8) так, чтобы каждый конь бил не более, чем одного другого?

32. Какое наибольшее число коней можно поставить на доску размера 6×6 так, чтобы каждый конь бил не более, чем одного другого?

33. Какое наибольшее число ферзей можно поставить на шахматную доску (размера 8×8) так, чтобы каждый ферзь бил не более, чем трёх других ферзей?